Name: **Leginummer:**

Mathematik-Teil der Prüfung Mathematik III im Herbst 2006

Vorlesung *Mathematik III mit Systemanalyse* von Dr. P. Thurnheer.

Vorgesehene Zeit: 40 Minuten

Maximale Punktzahl: 15 Punkte

Hilfsmittel: Schriftliche Unterlagen, <u>kein</u> Taschenrechner, <u>kein</u> Mobiltelephon

Achtung:

Sie bekommen zwei Versionen der Prüfung. Sie können aber nicht wählen. Studierende, welche die Vorlesung im Wintersemester 04/05 besucht haben, lösen die Aufgaben der entsprechenden Version, alle andern lösen die andere Prüfung.
(Die zwei Versionen haben den gleichen Schwierigkeitsgrad.)

Aufgabe	Punkte	Kontrolle
1		
2		
3		
Total		

Bitte wenden!

Aufgaben für Studierende, die Mathematik III im WS 04/05 besuchten:

1. Zeichnen Sie den Graphen der auf dem Intervall $[0, 2\pi)$ definierten Funktion

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

und entwickeln Sie diese in eine Fourierreihe.

(4 Punkte)

2. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$u_{xx}(x,t) - tu_t(x,t) = 0. \qquad (*)$$

a) Bestimmen Sie eine Lösung $u(x,t)$ der Differentialgleichung $(*)$, für welche gilt:

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{u(x,t)}{e^{2x}}$ existiert und ist nicht 0 für alle $t > 0$;
ii) $u(0,1) = 3$.

b) Bestimmen Sie diejenige Lösung $u(x,t)$ der Differentialgleichung $(*)$, für welche mit der in Aufgabe **1.)** definierten Funktion $g(x)$ gilt

i) $u(x,1) = g(x)$, $0 \le x < 2\pi$;
ii) $u(x + 2\pi, t) = u(x,t)$, für alle $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

(6 Punkte)

3. Führen Sie die partielle Differentialgleichung

$$\frac{u_x(x,t)}{x\ln(x)} - \cot(t)\ u_t(x,t) = 0$$

durch einen Separationsansatz auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zurück und lösen Sie diese zwei.

Hinweis: Es ist $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ von der Form $\frac{-f'(t)}{f(t)}$.

(5 Punkte)

Siehe nächstes Blatt!

Aufgaben für Studierende, die Mathematik III im WS 05/06 besuchten:

1. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes

$$G(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + \ln(1+z) \\ 2y + x^2 z^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

durch die Fläche $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z \geq 0\}$. (Sie können die Fläche selber orientieren.)

Hinweis: Fluss durch $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ und } z = 0\}$ berechnen und Satz von Gauss anwenden.

(4 Punkte)

2. Wir betrachten das Viereck in $\mathbb{R}^3$ mit Ecken
$A = (1,1,1)$, $B = (3,1,1)$, $C = (3,2,1)$, $D = (1,2,1)$ sowie das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \ln y \\ \frac{x^2}{2y} \\ \cos z \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes die Arbeit von F längs des Randes des Vierecks $ABCD$, d. h. längs des geschlossenen, stückweise linearen Pfades $A \to B \to C \to D \to A$.

b) Ist das Vektorfeld ein Potentialfeld? Wenn, ja geben Sie eine Potentialfunktion an. Wenn nein, begründen Sie Ihre Antwort.

c) Berechnen Sie die Arbeit des Vektorfeldes F von A nach C längs eines der Halbkreise mit Durchmesser AC in der Ebene $z = 1$.

(6 Punkte)

3. Führen Sie die partielle Differentialgleichung

$$\frac{u_x(x,t)}{x \ln(x)} - \cot(t)\, u_t(x,t) = 0$$

durch einen Separationsansatz auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zurück und lösen Sie diese zwei.

Hinweis: Es ist $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ von der Form $\frac{-f'(t)}{f(t)}$.

(5 Punkte)